МГТУ им. Н.Э. БАУМАНА
Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Вычислительная математика и математическая физика»

О.В. Михайлова, Т.В. Облакова

Случайные процессы-1. Основные понятия

Электронное учебное издание

Методические указания к выполнению домашнего задания по курсу «Теория случайных процессов»

Москва

УДК 519.2

Рецензент: проф., д.т.н. Сидняев Н.И.

Михайлова О.В., Облакова Т.В.

Случайные процессы-1. Основные понятия. Методические указания к выполнению домашнего задания по курсу «Теория случайных процессов». - МГТУ имени Н.Э. Баумана, 2014. 25 с.

Издание содержит материал для самостоятельной проработки основных понятий курса теории случайных процессов и охватывает как общие понятия, так и операции дифференцирования и интегрирования случайных по неслучайной переменной. Методические указания содержат необходимый теоретический материал, примеры решения типовых задач, материал для самоконтроля и варианты типового домашнего задания.

Для студентов направления подготовки "Математика и компьютерные науки", специальности "Прикладная математика", а также студентов машиностроительных специальностей, изучающих курс теории случайных процессов и стохастического анализа.

Рекомендовано учебно-методической комиссией факультета «Фундаментальные науки» МГТУ им. Н.Э. Баумана

Михайлова Ольга Владимировна

Облакова Татьяна Васильевна

Случайные процессы-1. Основные понятия

Содержание.

1.Введение. Цели и задачи методических указаний

Теория случайных процессов – бурно развивающаяся область теории вероятностей, изучающая изменение во времени состояния стохастической системы. Случайные процессы находят широчайшее применение в таких областях науки и техники, как автоматизированные системы управления, автоматизация технологических процессов и производств, радио- и электротехника, кибернетика, биология, химия, экономика, транспорт, связь и т.п. Программы все большего числа специальностей и направлений подготовки инженеров включают курс случайных процессов. Для успешного освоения дисциплины необходимы базовые знания курсов «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения», «Теория вероятностей» и некоторые элементы курса «Функциональный анализ». Курс достаточно хорошо обеспечен фундаментальными учебниками, написанными как ведущими математиками [1], так и преподавателями конкретных вузов [2], [3], в то же время открытие новых специальностей и направлений подготовки обнаружило недостаток методических материалов уровня задачников и методических указаний для проведения практических занятий и обеспечения самостоятельной подготовки студентов. Данное издание предназначено для методического обеспечения направления подготовки 01020062 – Математика и компьютерные науки, но также может быть использовано студентами других специальностей, предусматривающих расширенное изложение предмета.

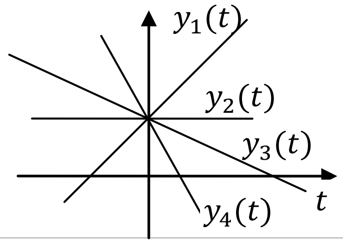
Целью данных методических указаний является ознакомление студентов, изучающих курс случайных процессов, с основными понятиями, относящимися к определению случайного процесса, его основными характеристиками и операциями дифференцирования и интегрирования случайного процесса по неслучайной переменной. Задача указаний – освоение терминологии и отработка навыков вычисления и интерпретации числовых характеристик случайных процессов. Методические указания содержат необходимый теоретический материал, сгруппированный в трех параграфах, примеры решения типовых задач, материал для самоконтроля в виде задач с приведенными ответами. Отдельный параграф содержит 25 вариантов типового домашнего задания.

2. Основные понятия и характеристики случайных процессов.

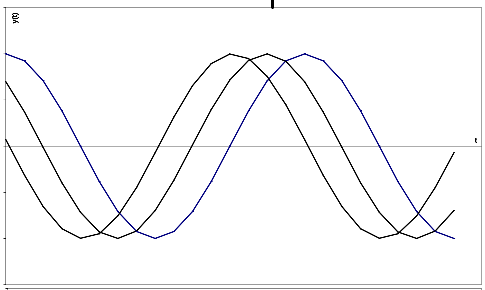
Определение. *Случайным процессом* (СП) $X(t)$ называется семейство случайных величин (СВ) $X(t,\omega)$, зависящее от неслучайного аргумента t, интерпретируемого как время. СВ $X(t_0)=X(t_0,\omega)$ в которую обращается СП при $t=t_0$ называется *сечением* СП, соответствующим данному значению аргумента t_0. *Реализацией* СП $X(t,\omega)$ называется неслучайная функция $X(t)$, в которую превращается СП $X(t)$ в результате опыта.

Примеры.

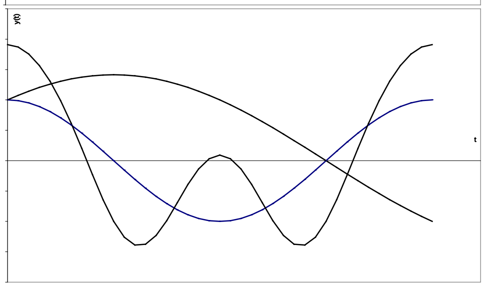
1) $Y(t)=X\cdot t+a$, где X – СВ, a – неслучайная постоянная. Каждая из реализаций этого СП – прямая линия, проходящая через точку $(0,a)$. Реализации различаются угловыми коэффициентами (см. рис 1.).



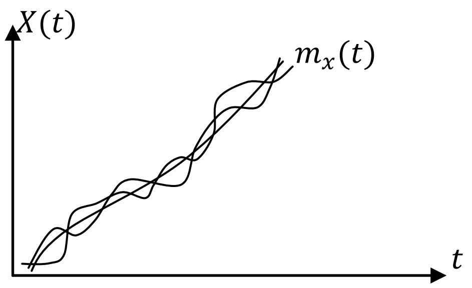
2) $Y(t)=\cos(\omega t+X)$, где X – случайная фаза колебаний, распределенная равномерно в интервале $(-\pi,\pi)$. Реализациями в этом примере являются синусоиды, смещенные относительно друг друга (см. рис 2.).



3) $Y(t)=U\cos at+V\sin at$ где (U,V) – система СВ, a – неслучайная постоянная. Здесь семейство синусоид зависит от двух параметров – значений системы СВ (U,V) . Примеры реализаций приведены на рис 3.



Определение. *Характеристиками* СП называются его моменты, которые являются неслучайными функциями. В частности, *математическим ожиданием* СП $X(t)$ называется неслучайная функция $m_X(t)$, которая при любом значении аргумента t равна математическому ожиданию соответствующего сечения СП: $m_X(t)=M[X(t)]$.



Математическое ожидание – это «средняя» функция, вокруг которой происходит разброс реализаций (см. рис. 4.). Заметим, что эта функция, характеризующая «среднее» значение СП, сама является неслучайной величиной.

Свойства математического ожидания.

1. Математическое ожидание (м.о.) неслучайной функции $\varphi(t)$ равно самой неслучайной функции: $M[\varphi(t)] = \varphi(t)$.

2. Неслучайный множитель $\varphi(t)$ можно выносить за знак м.о.:

$M[\varphi(t)X(t)] = \varphi(t)M[X(t)] = \varphi(t)m_X(t)$.

3. М. о. суммы двух случайных процессов равно сумме м. о.:

$M[X(t) + Y(t)] = m_X(t) + m_Y(t)$.

Это свойство можно обобщить на n слагаемых СП: $M[\sum_{i=1}^{n} X_i(t)] = \sum_{i=1}^{n} m_{X_i}(t)$.

В частности, если $X(t)$ – СП, $\varphi(t)$ - неслучайная функция, то

$M[X(t) + \varphi(t)] = m_X(t) + \varphi(t)$.

Определение. *Центрированным* СП $\check{X}(t)$ называется процесс, который получится, если из СП $X(t)$ вычесть его математическое ожидание: $\check{X}(t) = X(t) - m_X(t)$.

Определение. *Начальным моментом -го порядка* СП $X(t)$ называется математическое ожидание k-ой степени, соответствующего значения сечения СП:

$\alpha_k(t) = M\left[\left(X(t)\right)^k\right]$.

Определение. *Центральным моментом -го порядка* – м.о. k-ой степени центрированного СП : $\alpha_k(t) = M\left[\left(\check{X}(t)\right)^k\right] = M\left[\left(X(t) - m_X(t)\right)^k\right]$.

Определение. *Дисперсией* СП $X(t)$ называется неслучайная функция $D_X(t)$, которая при любых значениях аргумента t равна дисперсии соответствующего сечения СП $X(t)$, то есть среднее квадрата сечения СП минус квадрат среднего:

$D_X(t) = D[X(t)] = M[X^2(t)] - m_X^2(t) = M\left[\left(\check{X}(t)\right)^2\right] = M\left[\left(X(t) - m_X(t)\right)^2\right]$.

Определение. *Средним квадратичным отклонением (с.к.о.)* $\sigma_X(t)$ СП $X(t)$ называется арифметическое значение квадратного корня из дисперсии: $\sigma_X(t) = \sigma[X(t)] = \sqrt{D_X(t)}$.

Свойства дисперсии СП.

1. Дисперсия неслучайной функции $\varphi(t)$ равна нулю: $D[\varphi(t)] = 0$.

2. Дисперсия суммы СП $X(t)$ и неслучайной функции $\varphi(t)$ равна дисперсии СП $X(t)$: $D[X(t) + \varphi(t)] = D_X(t)$.

3. Дисперсия произведения СП $X(t)$ на неслучайную функцию $\varphi(t)$ равна произведению квадрата неслучайного множителя на дисперсию СП: $D[\varphi(t)X(t)] = \varphi^2(t)D_X(t)$.

Определение. *Корреляционной функцией* СП $X(t)$ (к.ф.) называется неслучайная функция $K_X(t,t')$ двух аргументов t и t', которая при каждой паре значений аргументов t и t' равна ковариации соответствующих сечений СП $X(t)$ и $X(t')$:

$K_X(t,t') = M\left[\check{X}(t) \cdot \check{X}(t')\right] = M[X(t)X(t')] - m_X(t)m_X(t')$,

или $K_X(t,t') = M\left[\left(X(t) - m_X(t)\right)\left(X(t') - m_X(t')\right)\right]$.

Свойства корреляционной функции.

1. При равенстве аргументов $(t = t')$ к.ф. равна дисперсии $K_X(t,t) = D_X(t)$.

2. К.ф. $K_X(t,t')$ симметрична относительно своих аргументов: $K_X(t,t') = K_X(t',t)$

3. К.ф. $K_X(t,t')$ является положительно определенной квадратичной формой относительно аргументов t и t': $\iint_B a(t)a(t')K_X(t,t')dtdt' \geq 0$, где $a(t)$ - любая функция аргумента t, B – произвольное подмножество множества $T \times T$, на котором определен СП $X(t)$.

4. К.ф. не меняется от прибавления к СП $X(t)$ произвольной неслучайной функции $\varphi(t)$: $K_Y(t,t') = K_X(t,t')$, если $Y(t) = X(t) + \varphi(t)$.

5. Имеет место неравенство Коши-Буняковского: $|\,K_X(t,t')| \leq \sqrt{D_X(t)\,D_X(t')}$.

Замечание. К.ф. $K_X(t,t')$ может быть как положительной, так и отрицательной. Она характеризует не только степень тесноты линейной зависимости между двумя сечениями $X(t)$ и $X(t')$ СП, но и разброс этих сечений относительно м.о. $m_X(t)$.

Определение. *Нормированной к.ф.* (н.к.ф.) $r_X(t,t')$ СП $X(t)$ называется функция, полученная делением к.ф. $K_X(t,t')$ на произведение с.к.о. $\sigma_X(t) \cdot \sigma_X(t')$:

$r_X(t,t') = \frac{K_X(t,t')}{\sigma_X(t) \cdot \sigma_X(t')} = \frac{K_X(t,t')}{\sqrt{D_X(t)\,D_X(t')}}$.

Свойства $r_X(t,t')$.

1. Если $t = t'$, то $r_X(t,t') = r_X(t,t) = 1$

2. Н.к.ф. $r_X(t,t')$ симметрична относительно своих аргументов $r_X(t,t') = r_X(t',t)$

3. $|r_X(t,t')| \leq 1$.

4. $\iint_B a(t)a(t')r_X(t,t')\sigma_X(t) \cdot \sigma_X(t')dtdt' \geq 0$

Определение. *Взаимной к.ф.* $R_{ij}(t,t')$ двух СП $X_i(t)$ и $X_j(t)$ называется неслучайная функция двух аргументов t и t', которая при каждой паре значений t и t' равна ковариации сечений двух СП $X_i(t)$ и $X_j(t)$: $R_{ij}(t,t') = M\left[\check{X}_i(t) \cdot \check{X}_j(t')\right]$.

Свойства взаимной к.ф.

1. Взаимная к.ф. $R_{ij}(t,t') = M\left[\breve{X}_i(t)\cdot\breve{X}_j(t')\right]$ в общем случае не равна взаимной к.ф. $R_{ij}(t',t) = M\left[\breve{X}_i(t')\cdot\breve{X}_j(t)\right]$, т.к. ковариация между сечениями $X_i(t)$ и $X_j(t')$ в общем случае не равна ковариации между сечениями $X_i(t')$ и $X_j(t)$: $R_{ij}(t,t') \neq R_{ij}(t',t)$.

2. При одновременной перемене мест индексов и аргументов вз. к.ф. не меняется: $R_{ij}(t,t') = R_{ji}(t',t)$.

3. При равенстве индексов $i = j$ вз.к.ф. равна к.ф. СП $X_i(t)$:

$R_{ii}(t,t') = M\left[\breve{X}_i(t)\cdot\breve{X}_i(t')\right] = K_{X_i}(t,t')$.

4. Пусть $Y_1(t) = X_1(t) + \varphi_1(t), Y_2(t) = X_2(t) + \varphi_2(t)$, где $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ - неслучайные функции. Тогда $R_{Y_1Y_2}(t_1,t_2) = R_{X_1X_2}(t_1,t_2)$.

Определение. *Нормированная вз.к.ф.* определяется по формуле:$r_{ij}(t,t') = \frac{R_{ij}(t,t')}{\sigma_i(t)\cdot\sigma_j(t')}$, где $\sigma_i(t) = \sqrt{D_i(t)} = \sqrt{K_i(t,t)}$ - с.к.о СП $X_i(t)$, $\sigma_j(t) = \sqrt{D_j(t)} = \sqrt{K_j(t,t)}$ - с.к.о СП $X_j(t)$.

Свойства нормированной взаимной корреляционной функции.

1. $r_{ij}(t,t') = r_{ji}(t',t)$.

2. $r_{ii}(t,t') = r_i(t,t')$.

Определение. Пусть $\vec{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t))$ – векторный случайный процесс. Его *математическим ожиданием* называется вектор $\vec{m}_X(t) = (m_1(t), m_2(t), \dots m_n(t))$, где $m_i(t) = M[X_i(t)]$.

Ковариационной матрицей векторного СП $\vec{X}(t)$ называется матрица, составленная из вз. к.ф. $R_{ij}(t,t')$:

$$\boldsymbol{R}_{ij}(t,t') = \begin{pmatrix} R_{11}(t,t') & R_{12}(t,t') & \dots & R_{1n}(t,t') \\ R_{21}(t,t') & R_{22}(t,t') & \dots & R_{2n}(t,t') \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{i1}(t,t') & R_{i2}(t,t') & \dots & R_{in}(t,t') \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{n1}(t,t') & R_{n2}(t,t') & \dots & R_{nn}(t,t') \end{pmatrix}.$$

Замечание. Матрица$\left(R_{ij}\right)$, вообще говоря, не симметрична, а на ее главной диагонали стоят $R_{ii}(t,t') = K_i(t,t')$ - корреляционные функции компонент $X_i(t)$.

Определение. СП $X_i(t)$ и $X_j(t), i \neq j,$ называются некоррелированными, если их вз.к.ф. $R_{ij}(t,t') = 0,$ при любом значении аргументов t и t'.

Определение. Векторный СП $\vec{X}(t)$ называется процессом *с некоррелированными составляющими*, если матрица вз.к.ф. является диагональной т.е. $R_{ij}(t,t') = 0$ при $i \neq j$.

Следствие. К.ф. суммы СП и некоррелированной с ним СВ равна сумме к.ф. СП и дисперсии СВ: $K_Z(t_1,t_2) = K_X(t_1,t_2) + DY$, если $Z(t) = X(t) + Y$.

Пример 1. Найдите м.о., дисперсию и к.ф. синусоиды постоянной частоты ω со случайной амплитудой U, если $MU = 7, DU = 0{,}5$.

Решение. Если СП $X(t) = U \sin \omega t$, то его характеристики равны

$m_X(t) = M[U \sin \omega t] = \sin \omega t \cdot MU = 7 \sin \omega t$,

$K_X(t_1, t_2) = M[(U \sin \omega t_1 - 7 \sin \omega t_1)(U \sin \omega t_2 - 7 \sin \omega t_2)] = M[(U-7)^2 \sin \omega t_1 \sin \omega t_2] =$
$= \sin \omega t_1 \sin \omega t_2 \, M[(U-7)^2] = \sin \omega t_1 \sin \omega t_2 \, DU = 0{,}5 \sin \omega t_1 \sin \omega t_2$.

$D_X(t) = K_X(t,t) = 0{,}5 \sin^2 \omega t$.

Пример 2. Найдите математическое ожидание, корреляционную функцию и дисперсию случайного процесса $X(t) = t^2 + U \cos t + V \sin t$, где случайный вектор (U, V) имеет математическое ожидание $(-0{,}5; 1)$ и ковариационную матрицу $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2{,}9 \end{pmatrix}$.

Решение.

$m_X(t) = M[t^2 + U \cos t + V \sin t] = t^2 + \cos t \, MU + \sin t \, MV = t^2 - 0{,}5 \cos t + \sin t$,

$K_X(t_1, t_2) = M[(t_1^2 + U \cos t_1 + V \sin t_1 - t_1^2 + 0{,}5 \cos t_1 - \sin t_1)(t_2^2 + U \cos t_2 + V \sin t_2 - t_2^2$
$+ 0{,}5 \cos t_2 - \sin t_2)] =$
$= M\big[\big((U+0{,}5)\cos t_1 + (V-1)\sin t_1\big)\big((U+0{,}5)\cos t_2 + (V-1)\sin t_2\big)\big] =$
$= M[(U+0{,}5)^2 \cos t_1 \cos t_2 + (U+0{,}5)(V-1)\sin(t_1+t_2) + (V-1)^2 \sin t_1 \sin t_2] =$
$= \cos t_1 \cos t_2 \, DU + \sin(t_1+t_2)\operatorname{cov}(U,V) + \sin t_1 \sin t_2 \, DV =$
$= 3 \cos t_1 \cos t_2 - 2\sin(t_1+t_2) + 2{,}9 \sin t_1 \sin t_2$,

$D_X(t) = K_X(t,t) = 3\cos^2 t - 2 \sin 2t + 2{,}9 \sin^2 t$.

Пример 3. Найдите математическое ожидание и корреляционную функцию суммы двух некоррелированных случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$ с характеристиками $m_X(t) = t$, $m_Y(t) = -t$, $K_X(t_1, t_2) = t_1 t_2$, $K_Y(t_1, t_2) = t_1 t_2 e^{\alpha(t_1+t_2)}$.

Решение.

$M[X(t) + Y(t)] = m_X(t) + m_Y(t) = t - t = 0$,

$K_{X+Y}(t_1, t_2) = M[(X(t_1) - t_1 + Y(t_1) + t_1)(X(t_2) - t_2 + Y(t_2) + t_2)] =$
$= M[(X(t_1) - t_1)(X(t_2) - t_2) + (X(t_1) - t_1)(Y(t_2) + t_2) + (Y(t_1) + t_1)(X(t_2) - t_2)$
$+ (Y(t_1) + t_1)(Y(t_2) + t_2)] = K_X(t_1, t_2) + 0 + 0 + K_Y(t_1, t_2)$
$= t_1 t_2 \big(1 + e^{\alpha(t_1+t_2)}\big)$.

Пример 4. Заданы два случайных процесса $X(t) = V_1 \cos \omega_1 t + V_2 \sin \omega_1 t$, $Y(t) = U_1 \cos \omega_2 t + U_2 \sin \omega_2 t$. Математические ожидания всех случайных величин V_1, V_2, U_1 и U_2 равны нулю, даны дисперсии $DV_1 = DV_2 = 1$, $DU_! = DU_2 = 4$, нормированная корреляционная матрица системы (V_1, V_2, U_1, U_2) имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0{,}5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Найдите взаимную корреляционную функцию $R_{XY}(t_1, t_2)$ и значение этой функции при $t_1 = 0$, $t_2 = 1$. Найдите $R_{YX}(t_1, t_2)$ и значение этой функции при $t_1 = 0$, $t_2 = 1$.

Решение. Найдем математические ожидания

$m_X(t) = M[V_1 \cos \omega_1 t + V_2 \sin \omega_1 t] = \cos \omega_1 t\, MV_1 + \sin \omega_1 t\, MV_2 = 0$, $m_Y(t) = 0$,

из таблицы найдем ковариации

$$\operatorname{cov}(V_1, U_1) = 0{,}5 \cdot \sqrt{DU_1 \cdot DV_1} = 1, \operatorname{cov}(V_2, U_2) = -0{,}5 \cdot \sqrt{DU_1 \cdot DU_1} = -2,$$

$\operatorname{cov}(V_1, V_2) = \operatorname{cov}(V_1, U_2) = \operatorname{cov}(V_2, U_1) = \operatorname{cov}(U_1, U_2) = 0$, то

$R_{XY}(t_1, t_2) = M[(V_1 \cos \omega_1 t_1 + V_2 \sin \omega_1 t_1)(U_1 \cos \omega_2 t_2 + U_2 \sin \omega_2 t_2)] =$

$= M[V_1 U_1 \cos \omega_1 t_1 \cos \omega_2 t_2 + V_1 U_2 \cos \omega_1 t_1 \sin \omega_2 t_2 + V_2 U_1 \sin \omega_1 t_1 \cos \omega_2 t_2$

$+ V_2 U_2 \sin \omega_1 t_1 \sin \omega_2 t_2] = \cos \omega_1 t_1 \cos \omega_2 t_2 - 2 \sin \omega_1 t_1 \sin \omega_2 t_2.$

Следовательно, $R_{XY}(0,1) = \cos \omega_2$.

Аналогично,

$R_{YX}(t_1, t_2) = M[(U_1 \cos \omega_2 t_1 + U_2 \sin \omega_2 t_1)(V_1 \cos \omega_1 t_2 + V_2 \sin \omega_1 t_2)] =$

$= M[V_1 U_1 \cos \omega_2 t_1 \cos \omega_1 t_2 + U_1 V_2 \cos \omega_2 t_1 \sin \omega_1 t_2 + U_2 V_1 \sin \omega_2 t_1 \cos \omega_1 t_2$

$+ U_2 V_2 \sin \omega_2 t_1 \sin \omega_1 t_2] = \cos \omega_2 t_1 \cos \omega_1 t_2 - 2 \sin \omega_2 t_1 \sin \omega_1 t_2.$

Следовательно, $R_{YX}(0,1) = \cos \omega_1$.

Пример 5. Имеются два некоррелированных случайных процесса $X(t)$ и $Y(t)$ с характеристиками $m_X(t) = t^2$, $m_Y(t) = 1$, $K_X(t_1, t_2) = e^{\alpha_1(t_1 + t_2)}$, $K_Y(t_1, t_2) = e^{\alpha_2(t_1 - t_2)}$. Найдите характеристики случайного процесса $Z(t) = X(t) + tY(t) + t^2$. Решите ту же задачу, если случайные процессы $X(t)$ и $Y(t)$ коррелированны, а их взаимная корреляционная функция равна $R_{XY}(t_1, t_2) = a\mathrm{e}^{-\alpha|t_2 - t_1|}$.

Решение.

Найдем математическое ожидание:

$m_Z(t) = M[X(t) + tY(t) + t^2] = m_X(t) + t m_Y(t) + t^2 = t^2 + t + t^2 = 2t^2 + t,$

Если случайные процессы $X(t)$ и $Y(t)$ некоррелированные, то

$K_Z(t_1, t_2) = M[(X(t_1) + t_1 Y(t_1) + t_1^2 - 2t_1^2 - t_1)(X(t_2) + t_2 Y(t_2) + t_2^2 - 2t_2^2 - t_2)] =$

$= M\Big[\big((X(t_1) - t_1^2) + t_1(Y(t_1) - 1)\big)\big((X(t_2) - t_2^2) + t_2(Y(t_2) - 1)\big)\Big] =$

$= M[(X(t_1) - t_1^2)(X(t_2) - t_2^2) + (X(t_1) - t_1^2) t_2 (Y(t_2) - 1) + t_1 (Y(t_1) - 1)(X(t_2) - t_2^2) +$

t1t2Yt1−1Yt2−1=KXt1,t2+t1t2KYt1,t2=eα1(t1+t2)+t1t2eα2(t1−t2), откуда

$D_Z(t) = K_Z(t, t) = e^{2\alpha_1 t} + t^2.$

В предположении коррелированности $X(t)$ и $Y(t)$получим:

$$K_Z(t_1,t_2) = K_X(t_1,t_2) + t_2R_{XY}(t_1,t_2) + t_1R_{XY}(t_2,t_1) + t_1t_2K_Y(t_1,t_2) =$$

$$= e^{\alpha_1(t_1+t_2)} + t_2\, ae^{-\alpha|t_2-t_1|} + t_1\, ae^{-\alpha|t_1-t_2|} + t_1t_2e^{\alpha_2(t_1-t_2)} =$$

$= e^{\alpha_1(t_1+t_2)} + a(t_1+t_2)e^{-\alpha|t_2-t_1|} + t_1t_2e^{\alpha_2(t_1-t_2)}$.

В этом случае $D_Z(t) = K_Z(t,t) = e^{2\alpha_1 t} + t^2 + 2at$.

Задачи для самоконтроля.

1. Случайный процесс $X(t) = Ve^{4t}$, где V - случайная величина. Найдите сечения СП $X(t)$, соответствующие фиксированным значениям аргумента: а) $t_1 = 3$; б) $t_2 = 4\pi$.

Ответ: а) Ve^{12}; б) $Ve^{16\pi}$.

2. Найдите математическое ожидание, корреляционную функцию и дисперсию СП $X(t) = U\sin 7t$, где U- случайная величина с $MU = 4, DU = 0{,}2$,.

Ответ: $m_X(t) = 4\sin 7t$, $K_X(t_1,t_2) = 0{,}2\sin 7t_1 \sin 7t_2$, $D_X(t) = 0{,}2\sin^2 7t$.

3. Случайный процесс $X(t) = U\sin 4t$, где U - случайная величина, равномерно распределенная на интервале $(3;5)$. Найдите математическое ожидание, корреляционную функцию и дисперсию случайного процесса $X(t)$.

Ответ: $m_X(t) = 4\sin 4t$, $K_X(t_1,t_2) = \frac{1}{3}\sin 4t_1 \sin 4t_2$, $D_X(t) = \frac{1}{3}\sin^2 4t$.

4. Случайный процесс $X(t) = V(t+t^3)$, где V случайная величина, равномерно распределенная на интервале $(-2;2)$. Найдите математическое ожидание, корреляционную функцию, дисперсию и одномерную плотность распределения случайного процесса $X(t)$.

Ответ: $m_X(t) = 0$, $K_X(t_1,t_2) = \frac{4}{3}(t_1+t_1^3)(t_2+t_2^3)$, $D_X(t) = \frac{4}{3}(t+t^3)^2$,

$$p_{X(t)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{4(t+t^3)}, & |x| < 2|t+t^3| \\ 0, & |x| > 2|t+t^3| \end{cases}.$$

5. Задана корреляционная функция $K_X(t_1,t_2) = t_1t_2e^{-|t_2-t_1|}$ случайного процесса $X(t)$. Найдите нормированную корреляционную функцию.

Ответ: $r_X(t_1,t_2) = e^{-|t_2-t_1|}sign(t_1t_2)$.

6. Найдите математическое ожидание, корреляционную функцию и дисперсию случайного процесса $X(t) = 1 + Ut^{-3t} + Ve^{-5t}$, если двумерная плотность распределения вероятностей вектора (U,V) имеет вид: $f(x_1;x_2) = \dfrac{1}{24\pi}\exp\left\{-\left(\dfrac{(x_1-4)^2}{32} + \dfrac{(x_2-2)^2}{18}\right)\right\}$.

Ответ: $m_X(t) = 1 + 4e^{-3t} + 2e^{-2t}$, $K_X(t_1,t_2) = 16e^{-3(t_1+t_2)} + 9e^{-5(t_1+t_2)}$,

$D_X(t) = 16e^{-6t} + 9e^{-10t}$.

7. Докажите, что корреляционная функция случайного процесса $X(t)$ равна корреляционной функции центрированного случайного процесса $\check{X}(t) = X(t) - m_X(t)$.

8. Известна дисперсия $D_X(t)$ случайного процесса $X(t)$. Найдите дисперсию случайного процесса $Y(t) = X(t) + 3$.

Ответ. $D_Y(t) = D_X(t)$.

9. Известна дисперсия $D_X(t)$ случайного процесса $X(t)$. Найдите дисперсию случайного процесса $Y(t) = (t+4)X(t)$.

Ответ. $D_Y(t) = (t+4)^2 D_X(t)$.

10. На вход усилительного звена подается случайный процесс $X(t)$, математическое ожидание и корреляционная функция которого: $m_X(t) = t$, $K_X(t_1, t_2) = e^{-\alpha(t_2 - t_1)^2}, \alpha > 0$. Найдите: а) математическое ожидание; б) корреляционную функцию выходного случайного процесса $Y(t)$, если коэффициент усиления $k = 5$.

Ответ: $m_X(t) = 5t$, $K_X(t_1, t_2) = 25e^{-\alpha(t_2 - t_1)^2}$.

11. Известна к.ф. $K_X(t_1, t_2)$ случайного процесса $X(t)$. Найдите корреляционную функцию случайного процесса: а) $Y(t) = X(t)(t+2)$; б) $Z(t) = CX(t)$, где C - постоянная.

Ответ: а) $K_Y(t_1, t_2) = (t+2)^2 K_X(t_1, t_2)$, б) $K_Z(t_1, t_2) = C^2 K_X(t_1, t_2)$.

12. Случайный процесс $X(t)$ задан в виде $X(t) = Vt + b$, где V случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами m_V и σ_V, b - неслучайная величина. Найдите плотность распределения $f(x,t)$ сечения случайного процесса $X(t)$ и его характеристики $m_X(t)$, $K_X(t_1, t_2)$, $D_X(t)$.

Ответ: $f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_V t} \exp\left\{-\frac{(x - m_V t - b)^2}{2\sigma_V^2 t^2}\right\}$, $m_X(t) = m_V t + b$, $K_X(t_1, t_2) = t_1 t_2 \sigma_V^2$, $D_X(t) = t^2 \sigma_V^2$.

13. Докажите, что к. ф. произведения двух центрированных некоррелированных случайных процессов равна произведению к. ф. сомножителей.

14. Дан случайный процесс $X(t) = t + e^{-4t} + U_1 \cos t + U_2 \sin t + V_1 \cos 3t + V_2 \sin 3t$, где U_1, U_2, V_1 и V_2 – попарно некоррелированные случайные величины, $MU_1 = MU_2 = MV_1 = MV_2 = 0$, $DU_1 = DU_2 = 2, DV_1 = DV_2 = 1$. Найдите математическое ожидание, корреляционную функцию и дисперсию случайного процесса $X(t)$.

Ответ: $m_X(t) = t + e^{-4t}$, $K_X(t_1, t_2) = 2\cos(t_1 - t_2) + \cos 3(t_1 - t_2)$, $D_X(t) = 3$.

15. Найдите взаимную корреляционную функцию двух случайных процессов $X(t) = Ue^t$ и $Y(t) = Ut^3$, где U случайная величина, причем $DU = 5$.

Ответ: $R_{XY}(t_1, t_2) = 5e^{t_1} t_2^3$.

16. Найдите нормированную взаимную корреляционную функцию двух случайных процессов $X(t) = (t+1)U$ и $Y(t) = tU$, где U - случайная величина, причем $DU = 10$.

Ответ: $R_{XY}(t_1, t_2) = 10(t_1 + 1)t_2$.

17. Докажите, что взаимная к. ф. двух случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$ равна взаимной к. ф. центрированных случайных процессов $\check{X}(t)$ и $\check{Y}(t)$.

18. Случайный процесс $X(t)$ в каждом сечении представляет собой непрерывную случайную величину с плотностью распределения $f(x,t)$. Напишите выражения для математического ожидания $M[X(t)]$ и дисперсии $D[X(t)]$.

Ответ: $M[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x,t)dx$, $D[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, f(x,t)dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x,t)dx\right)^2$.

19. Задан случайный процесс $X(t) = Ue^{-at} + Ve^{-bt}$, где U и V - некоррелированные СВ, для которых $m_U = m_V = 0$, $D_U = D_V = D$. Найдите характеристики случайного процесса $X(t)$.

Ответ: $m_X(t) = 0$, $K_X(t_1, t_2) = \left(e^{-a(t_1+t_2)} + e^{-b(t_1+t_2)}\right) D$, $D_X(t) = (e^{-2at} + e^{-2bt})D$.

20. Случайный процесс $X(t)$ задан своим каноническим разложением $X(t) = \sum_{i=1}^{n} V_i e^{-a_i t} + b$, где V_i - центрированные случайные величины с дисперсиями D_{V_i}, $i = 1,2, \ldots, n$,

$M\left[V_i V_j\right] = 0$ при $i \neq j, a$ - неслучайная величина. Найдите характеристики СП $X(t)$.

Ответ: $m_X(t) = b$, $K_X(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^{n} e^{-a_i(t_1+t_2)}\, D_{V_i}$, $D_X(t) = \sum_{i=1}^{n} e^{-2a_i t}\, D_{V_i}$.

3. Дифференцирование случайных процессов.

Определение. Говорят, что последовательность случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ *сходится в смысле среднего квадратичного* к случайной величине X, если математическое ожидание квадрата разности $X_n - X$ стремится к нулю при $n \to \infty$: $\lim_{n\to\infty} M[(X_n - X)^2] = 0$. Случайную величину X называют *пределом в среднеквадратичном* последовательности случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ и пишут:

$$X = \underset{n\to\infty}{l.i.m.} X_n.$$

Определение. Случайная величина η называется пределом *в смысле среднего квадратичного* случайной функции $\xi(t)$ при $t \to a$, если математическое ожидание квадрата разности $\xi(t) - \eta$ стремится к нулю при $n \to \infty$: $\lim_{n\to\infty} M[(\xi(t) - \eta)^2] = 0$,

$$\eta = \underset{t\to a}{l.i.m.} \xi(t).$$

Определение. Случайный процесс $X(t)$ называют *дифференцируемым*, если существует такой процесс $X'(t)$ (его называют *производной*), что

$$\underset{\Delta t\to 0}{l.i.m.}\left[\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}-X'(t)\right].$$

Определение. *Производной случайного процесса* $X'(t)$ называют среднеквадратичный предел отношения приращения процесса к приращению аргумента Δt при $\Delta t \to 0$:

$$X'(t)=\underset{\Delta t\to 0}{l.i.m.}\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}.$$

Теорема 1. Математическое ожидание производной $X'(t)$ от случайного процесса $X(t)$ равно производной от его математического ожидания: $m_{X'}(t)=(m_X(t))'$.

Теорему 1 можно обобщить: математическое ожидание производной порядка n от случайного процесса равно производной этого же порядка от его математического ожидания.

Теорема 2. Корреляционная функция производной $X'(t)$ от случайного процесса $X(t)$ равна второй смешанной производной от его корреляционной функции:

$$K_{X'}(t_1,t_2)=\frac{\partial^2 K_X(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}.$$

Теорема 3. Взаимная корреляционная функция случайного процесса $X(t)$ и его производной $X'(t)$ равна частной производной от корреляционной функции по соответствующему аргументу: $R_{XX'}(t_1,t_2)=\dfrac{\partial K_X(t_1,t_2)}{\partial t_2}$, $R_{X'X}(t_1,t_2)=\dfrac{\partial K_x(t_1,t_2)}{\partial t_1}$.

Пример 1. Известно, что $M[X(t)]=2t+1$, $K_X(t_1,t_2)=e^{-(t_2-t_1)^2}$. Найдите математическое ожидание, корреляционную функцию и дисперсию процесса $Y(t)=X'(t)$.

Решение. Согласно теореме 1 $m_Y(t)=\frac{d}{dt}M[X(t)]=(2t+1)'=2$.

Используя теорему 2, находим $K_Y(t_1,t_2)=\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2}K_X(t_1,t_2)=\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2}e^{-(t_2-t_1)^2}=$

$$=-\frac{\partial}{\partial t_1}e^{-(t_2-t_1)^2}\big(2(t_2-t_1)\big)=-e^{-(t_2-t_1)^2}(4(t_2-t_1)^2-2)=2e^{-(t_2-t_1)^2}(1-2(t_2-t_1)^2).$$

Откуда $D_Y(t)=K_Y(t,t)=2$.

Пример 2. Дифференцируемый в смысле среднего квадратичного случайный процесс $X(t)$ имеет математическое ожидание $m_X(t)$ и корреляционную функцию $K_X(t_1,t_2)$. Найдите математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию случайного процесса $Y(t)=X(t)+X'(t)$.

Решение. По свойствам математического ожидания и теореме 1имеем:

$$m_Y(t)=M[X(t)+X'(t)]=M[X(t)]+M[X'(t)]=m_X(t)+\big(m_X(t)\big)'.$$

Далее используем теоремы 2 и 3:

$$K_Y(t_1,t_2)=M\big[\big(X(t_1)+X'(t_1)-m_X(t_1)-m_{X'}(t_1)\big)\big(X(t_2)+X'(t_2)-m_X(t_2)-m_{X'}(t_2)\big)\big]=$$

$= M\left[\left(X(t_1) - m_X(t_1)\right)\left(X(t_2) - m_X(t_2)\right) + \left(X(t_1) - m_X(t_1)\right)\left(X'(t_2) - m_{X'}(t_2)\right) + \right.$

$X't1 - mX't1Xt2 - mXt2 + X't1 - mX't1X't2 - mX't2 =$

$= K_X(t_1, t_2) + R_{XX'}(t_1, t_2) + R_{X'X}(t_1, t_2) + K_{X'}(t_1, t_2) =$

$= K_X(t_1, t_2) + \frac{\partial}{\partial t_1} K_X(t_1, t_2) + \frac{\partial}{\partial t_2} K_X(t_1, t_2) + \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} K_X(t_1, t_2).$

Тогда $D_Y(t) = K_Y(t, t) = K_X(t, t) + 2\frac{\partial}{\partial t} K_X(t, t) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} K_X(t, t).$

Пример 3. Траектория космического летательного аппарата в вертикальной плоскости изображается двумя уравнениями: $X(t) = At^2 + Bt + C$, $Y(t) = Et^2 + Ft + H$. Коэффициенты A, B, C, E, F, H являются случайными, так как определяются из опыта с ошибками. Номинальные значения величин A, B, C, E, F, H равны a, b, c, e, f, h, соответственно. Ошибки ΔA, ΔB, ΔC, ΔE, ΔF, ΔH представляют собой случайные величины с математическими ожиданиями, равными нулю, и дисперсиями $D_A, D_B, D_C, D_E, D_F, D_H$. Нормированная корреляционная матрица этих ошибок имеет вид

$\begin{pmatrix} 1 & 0{,}4 & -0{,}2 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}4 & 1 & 0{,}3 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}2 & 0{,}3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0{,}7 & -0{,}2 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}7 & 1 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}2 & 0{,}5 & 1 \end{pmatrix}$. Найдите математическое ожидание, корреляционную функцию и дисперсию случайных функций $V(t)$ и $U(t)$, представляющих собой горизонтальную и вертикальную составляющие скорости снаряда.

Решение. Найдем производные: $V(t) = X'(t) = 2At + B, U(t) = Y'(t) = 2Et + F$. Тогда $M[V(t)] = M[2At + B] = 2tMA + Mb = 2ta + b$, аналогично $M[U(t)] = 2te + f$.

Вычислим корреляционную функцию процесса $V(t)$:

$K_V(t_1, t_2) = M[(2At_1 + B - 2at_1 - b)(2At_2 + B - 2at_2 - b)] =$

$= M[(2t_1(A - a) + B - b)(2t_2(A - a) + B - b)] = 4t_1t_2D_A + 2(t_1 + t_2)\text{cov}(A, B) + D_B =$

$= 4t_1t_2D_A + 2(t_1 + t_2)0{,}4\sqrt{D_AD_B} + D_B = 4t_1t_2D_A + 0{,}8(t_1 + t_2)\sqrt{D_AD_B} + D_B.$

Тогда $D_V(t) = K_V(t, t) = 4t^2D_A + 1{,}6t\sqrt{D_AD_B} + D_B.$

Характеристики процесса $U(t)$ находятся аналогично:

$K_U(t_1, t_2) = 4t_1t_2D_E + 1{,}4(t_1 + t_2)\sqrt{D_ED_F} + D_F,\ D_U(t) = 4t^2D_E + 2{,}8t\sqrt{D_ED_F} + D_F.$

Задачи для самоконтроля.

1. Задано математическое ожидание $M[X(t)] = t^3 - 2t^2 + 1$ случайного процесса $X(t)$. Найдите математическое ожидание его производной.

Ответ: $m_{X'}(t) = 3t^2 - 4t$.

2. Задан случайный процесс $X(t)$ с математическим ожиданием $M[X(t)] = 5\sin t + t^2$ и корреляционной функцией $K_X(t_1, t_2) = 3t_1t_2\cos(t_1 - t_2)$. Найдите математическое ожидание, корреляционную функцию и дисперсию случайного процесса $Y(t) = X'(t)$.

Ответ: $m_Y(t) = 5\cos t + 2t$, $K_Y(t_1, t_2) = 3(t_1t_2 + 1)\cos(t_1 - t_2)$, $D_Y(t) = 3(t^2 + 1)$.

3. Задан случайный процесс $X(t) = Ue^{3t}\sin 2t$, где случайная величина U имеет характеристики $MU = 2, DU = 3$. Найдите математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию случайного процесса $Y(t) = X'(t)$.

Ответ: $m_Y(t) = 2e^{3t}(3\sin 2t + 2\cos 2t)$, $K_Y(t_1, t_2) = 3e^{3(t_1+t_2)}(9\sin 2t_1\sin 2t_2 +$ *6*sin*2(t1+t2)+4*cos*2t1*cos*2t2*, *DYt=3e6t9*sin2*2t+6*sin*4t+4*cos2*2t*.

4. Найдите математическое ожидание, корреляционную функцию и дисперсию случайного процесса $Y(t) = X'(t)$, если $X(t) = 5 + 2t + Ut^2 + Vt^4$, где U и V - некоррелированные СВ, для которых $m_U = m_V = 0$, $D_U = 1, D_V = 0{,}2$.

Ответ: $m_Y(t) = 2$, $K_Y(t_1, t_2) = 4\,t_1t_2 + 3{,}2\,t_1^3t_2^3$, $D_Y(t) = 4t^2 + 3{,}2\,t^6$.

5. Дифференцируемый в смысле среднего квадратичного случайный процесс $X(t) = Ut + V\cos t$, где случайный вектор (U, V) имеет математическое ожидание $(1; -1)$ и ковариационную матрицу $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Найдите математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию процесса $Y(t) = X'(t)$.

Ответ: $m_Y(t) = 1 + \sin t$, $K_Y(t_1, t_2) = 2 - \sin t_1 - \sin t_2 + 3\sin t_1\sin t_2$,
$D_Y(t) = 2 - \sin t + 3\sin^2 t$.

6. Найдите математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию процесса $Y(t) = X'(t)$, если $X(t) = t + U\cos t + V\sin t$, где случайный вектор (U, V) имеет математическое ожидание $(-1/2; 1)$ и ковариационную матрицу $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2{,}9 \end{pmatrix}$.

Ответ: $m_Y(t) = 1 + 0{,}5\sin t + \cos t$, $K_Y(t_1, t_2) = 3\sin t_1\sin t_2 + 2\sin(t_1 + t_2) + 2{,}9\cos t_1\cos t_2$, $D_Y(t) = 3\sin^2 t + 2\sin 2t + 2{,}9\cos^2 t$.

7. Случайный процесс $X(t)$ имеет характеристики $M[X(t)] = 1$, $K_X(t_1, t_2) = e^{\alpha(t_2+t_1)}$. Найдите характеристики случайного процесса $Y(t) = tX'(t) + 1$.

Ответ: $m_Y(t) = 1$, $K_Y(t_1, t_2) = \alpha^2t_1t_2e^{\alpha(t_2+t_1)}$, $D_Y(t) = \alpha^2t^2e^{2\alpha t}$.

8. Случайный процесс $X(t)$ имеет вид: $X(t) = V\cos\omega t$, где $V-$ случайная величина с характеристиками $MV = 2$, $\sigma_V = 3$. Найдите характеристики случайного процесса $Y(t) = kX'(t) + X(t)$, где k - неслучайная величина.

Ответ: $m_Y(t) = -2k\omega\sin\omega t + 2\cos\omega t$, $D_Y(t) = 3k^2\omega^2\sin^2\omega t - 3k\omega\sin 2\omega t + 3\cos^2\omega t$,

$K_Y(t_1,t_2) = 3k^2\omega^2 \sin\omega t_1 \sin\omega t_2 - 3k\omega\ \sin\omega(t_1+t_2) + 3\cos\omega t_1 \cos\omega t_2$.

9. Случайный процесс $X(t)$ имеет характеристики: $m_X(t) = t^2 - 3$, $K_X(t_1,t_2) = 2e^{-\alpha(t_2-t_1)^2}$. Найдите характеристики следующих случайных процессов: $Y(t) = tX(t) + t^2 + 1$, $Z(t) = 2tX'(t) + (1-t)^2$, $U(t) = X''(t) + 1$.

Ответ: $m_Y(t) = t^3 + t^2 - 3t + 1$, $K_Y(t_1,t_2) = 2t_1t_2$, $D_Y(t) = 2t^2$;

$m_Z(t) = 4t^2 - (t-1)^2$, $K_Z(t_1,t_2) = 16\alpha t_1 t_2 e^{-\alpha(t_2-t_1)^2}(1 - 2\alpha(t_2-t_1)^2)$, $D_Z(t) = 16\alpha t^2$;

$m_U(t) = 3$, $K_U(t_1,t_2) = 8\alpha^2 e^{-\alpha(t_2-t_1)^2}[4\alpha^2(t_2-t_1)^4 - 12\alpha(t_2-t_1)^2 + 3]$, $D_U(t) = 24\alpha^2$.

10. Найдите корреляционную функцию и дисперсию случайного процесса $Y(t) = X(t) + X'(t)$, если а) $K_X(t_1,t_2) = a^2 \sin\omega t_1 \sin\omega t_2$; б) $K_X(t_1,t_2) = e^{-2(t_2+t_1)}\cos(t_2 - t_1)$.

Ответ: а) $K_Y(t_1,t_2) = a^2 \sin\omega t_1 \sin\omega t_2 + a^2\omega \sin\omega(t_1+t_2) + a^2\omega^2 \cos\omega t_1 \cos\omega t_2$,

$D_Y(t) = a^2\sin^2\omega t + a^2\omega \sin 2\omega t + a^2\omega^2\cos^2\omega t$;

б) $K_Y(t_1,t_2) = 2e^{-2(t_2+t_1)}\cos(t_2-t_1)$, $D_Y(t) = 2e^{-4t}$.

11. Докажите свойства (теорема 3): а) $R_{XX'}(t_1,t_2) = \dfrac{\partial K_X(t_1,t_2)}{\partial t_2}$; б) $R_{X'X}(t_1,t_2) = \dfrac{\partial K_X(t_1,t_2)}{\partial t_1}$.

12. Задана корреляционная функция случайного процесса $X(t)$: $K_X(t_1,t_2) = e^{-(t_2-t_1)^2}$. Найдите взаимные корреляционные функции случайного процесса и его производной.

Ответ: $R_{XX'}(t_1,t_2) = -2(t_2-t_1)e^{-(t_2-t_1)^2}$

13. Известна взаимная корреляционная функция $R_{XX'}(t_1,t_2)$ случайного процесса $X(t)$ и его производной $X'(t)$. Найдите корреляционную функцию производной.

Ответ: $K_{X'}(t_1,t_2) = \frac{\partial}{\partial t_1} R_{XX'}(t_1,t_2)$.

14. Известна взаимная корреляционная функция $R_{XX'}(t_1,t_2) = t_1(t_2+2)e^{t_2+t_1}$ случайного процесса $X(t)$ и его производной $X'(t)$. Найдите корреляционную функцию производной.

Ответ: $K_{X'}(t_1,t_2) = (t_1t_2 + 2t_1 + t_2 + 2)e^{t_2+t_1}$.

15. Докажите свойства: а) $R_{X''X}(t_1,t_2) = \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} K_X(t_1,t_2)$; б) $R_{XX''}(t_1,t_2) = \frac{\partial^2}{\partial t_2^2} K_X(t_1,t_2)$.

16. Задана корреляционная функция $K_X(t_1,t_2) = t_1t_2e^{t_2+t_1}$ случайного процесса $X(t)$. Найдите взаимные корреляционные функции случайного процесса и его второй производной.

Ответ: $R_{XX''}(t_1,t_2) = (2t_1 + t_1t_2)e^{t_2+t_1}$.

17. Задана корреляционная функция $K_X(t_1,t_2)$ случайного процесса $X(t)$. Найдите взаимную корреляционную функцию $R_{YZ}(t_1,t_2)$ случайных процессов $Y(t) = aX'(t) + bX(t)$ и $Z(t) = cX'(t) + dX(t)$, где a, b, c, d - постоянные действительные числа.

Ответ: $R_{YZ''}(t_1,t_2) = ac\frac{\partial^2}{\partial t_1 t_2} K_X(t_1,t_2) + bc\frac{\partial}{\partial t_2} K_X(t_1,t_2) + ad\frac{\partial}{\partial t_1} K_X(t_1,t_2) + bd\, K_X(t_1,t_2)$.

4. Интегрирование случайных процессов.

Определение. *Интегралом от случайного процесса* $X(t)$ по отрезку $[0;t]$ называют предел в среднеквадратичном интегральной суммы при стремлении к нулю максимальной длины интервала разбиения $d = \max_i \Delta s_i$:

$$Y(t) = \int_0^t X(s)ds = \underset{d\to 0}{l.i.m.} \sum_i X(s_i')\Delta s_i.$$

Теорема 1. Математическое ожидание интеграла от случайного процесса равно интегралу от его математического ожидания $m_X(s)$:

$$M\left[\int_0^t X(s)ds\right] = \int_0^t m_X(s)ds.$$

Теорема 2. Корреляционная функция интеграла $Y(t) = \int_0^t X(s)ds$ от случайного процесса $X(t)$ равна двойному интегралу от его корреляционной функции $K_X(t_1,t_2)$:

$$K_Y(t_1,t_2) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} K_X(s_1,s_2)\, ds_1 ds_2.$$

Теорема 3. Взаимная корреляционная функция случайных процессов $X(t)$ и $Y(t) = \int_0^t X(s)ds$ равна интегралу от корреляционной функции случайного процесса $X(t)$:

$$R_{XY}(t_1,t_2) = \int_0^{t_2} K_X(t_1,s)ds.$$

Пример 1. Найдите математическое ожидание, корреляционную функцию и дисперсию случайного процесса $Y(t) = \int_0^t X(s)ds$, если $X(t) = Ue^{3t}\cos 2t$, где случайная величина U имеет характеристики $MU = 5, DU = 1$.

Решение.

Сначала вычислим математическое ожидание случайного процесса $X(t)$:

$m_X(t) = M[Ue^{3t}\cos 2t] = e^{3t}\cos 2t\, MU = 5e^{3t}\cos 2t.$

Теперь находим математическое ожидание интеграла:

$$M[Y(t)] = \int_0^t m_X(s)ds = \int_0^t 5e^{3t}\cos 2t\, ds = \frac{5}{13}[e^{3t}(2\sin 2t + 3\cos 2t) - 3].$$

Для получения корреляционной функции случайного процесса $Y(t)$, предварительно найдем корреляционную функцию случайного процесса $X(t)$. Представив центрированный случайный процесс $\check{X}(t)$ в виде

$\check{X}(t) = X(t) - m_X(t) = Ue^{3t}\cos 2t - 5e^{3t}\cos 2t = e^{3t}\cos 2t\,(U-5)$, получим

$$K_X(s_1, s_2) = M\left[\left(e^{3s_1}\cos 2s_1\,(U-5)\right)\left(e^{3s_2}\cos 2s_2\,(U-5)\right)\right] =$$

$$= e^{3(s_1+s_2)}\cos 2s_1 \cos 2s_2\, M[(U-5)^2] = e^{3(s_1+s_2)}\cos 2s_1 \cos 2s_2.$$

Тогда по теореме 2

$$K_Y(t_1, t_2) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} K_X(s_1, s_2)\, ds_1 ds_2 = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} e^{3(s_1+s_2)}\cos 2s_1 \cos 2s_2\, ds_1 ds_2 =$$

$$= \frac{1}{169}\left(e^{3t_1}(2\sin 2t_1 + 3\cos 2t_1) - 3\right)\left(e^{3t_1}(2\sin 2t_1 + 3\cos 2t_1) - 3\right).$$

Найдем дисперсию: $D_Y(t) = K_Y(t,t) = \frac{1}{169}\left[e^{3t}(2\sin 2t + 3\cos 2t) - 3\right]^2$.

Пример 2. Задан случайный процесс $X(t) = U\cos 3t$, где U - случайная величина, $MU = 1, DU = 1$.. Найдите математическое ожидание, корреляционную функцию и дисперсию случайного процесса $Y(t) = \frac{1}{t}\int_0^t X(s)ds$.

Решение.

Сначала вычислим характеристики случайного процесса $X(t)$:

$m_X(t) = M[U\cos 3t] = \cos 3t\, MU = \cos 3t$,

$K_X(s_1, s_2) = M\left[\left(\cos 3s_1\,(U-1)\right)\left(\cos 3s_2\,(U-1)\right)\right] = \cos 3s_1 \cos 3s_2$.

Теперь находим математическое ожидание интеграла $Z(t) = \int_0^t X(s)ds$:

$$m_Z(t) = M\left[\int_0^t X(s)ds\right] = \int_0^t m_X(s)ds = \int_0^t \cos 3t\, ds = \frac{1}{3}\sin 3t.$$

Для получения корреляционной функции случайного процесса $Z(t)$, проинтегрируем $K_X(s_1, s_2)$ согласно теореме 2

$$K_Z(t_1, t_2) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} K_X(s_1, s_2)\, ds_1 ds_2 = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} \cos 3s_1 \cos 3s_2\, ds_1 ds_2 = \frac{1}{9}\sin 3t_1 \sin 3t_2.$$

Далее, поскольку $Y(t) = \frac{1}{t}Z(t)$, то $m_Y(t) = \frac{1}{t}m_Z(t) = \frac{1}{3t}\sin 3t$.

$K_Y(t_1, t_2) = M\left[\left(Y(t_1) - m_Y(t_1)\right)\left(Y(t_2) - m_Y(t_2)\right)\right] =$

$$= \frac{1}{t_1 t_2} M[(Z(t_1) - m_Z(t_1))(Z(t_2) - m_Z(t_2))] = \frac{1}{t_1 t_2} K_Z(t_1, t_2) = \frac{1}{9 t_1 t_2} \sin 3t_1 \sin 3t_2.$$

Следовательно, $D_Y(t) = K_Y(t,t) = \frac{1}{9t^2} \sin^2 3t$.

Задачи для самоконтроля.

1. Найдите математическое ожидание случайного процесса $Y(t) = \int_0^t X(s)ds$, зная математическое ожидание $m_X(t)$ случайного процесса $X(t)$: а) $m_X(t) = 4\cos^2 t$;
б) $m_X(t) = t^2 - \sin 3t$.

Ответ: а) $m_Y(t) = 2t + \sin 2t$; б) $m_Y(t) = \frac{1}{3}(t^3 + \cos 3t - 1)$.

2. Найдите математическое ожидание случайного процесса $Y(t) = \int_0^t X(s)ds$, зная случайный процесс $X(t) = U \sin^2 t$, где U случайная величина, $MU = 2$.

Ответ: $m_Y(t) = t - \frac{1}{2}\sin 2t$.

3. Найдите математическое ожидание случайного процесса $Y(t) = (t^2 + 4)\int_0^t X(s)ds$, если $X(t) = U \cos^2 t$, где U случайная величина, $MU = 3$.

Ответ: $m_Y(t) = \frac{3}{4}(t^2 + 4)(2t + \sin 2t)$.

4. Случайный процесс $X(t)$ имеет характеристики $M[X(t)] = 0$, $K_X(t_1, t_2) = \frac{1}{1+(t_2 - t_1)^2}$. Найдите характеристики случайного процесса $Y(t) = \int_0^t X(s)ds$.

Ответ: $m_Y(t) = 0$, $D_Y(t) = 2t \operatorname{arctg} t - \ln(1 + t^2)$,

$K_X(t_1, t_2) = t_1 \operatorname{arctg} t_1 + t_2 \operatorname{arctg} t_2 - (t_1 - t_2)\operatorname{arctg}(t_1 - t_2) + \frac{1}{2}\ln\frac{1+(t_1 - t_2)^2}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)}$.

5. Задана корреляционная функция $K_X(t_1, t_2) = sin\,\omega t_1 \sin \omega t_2$ случайного процесса $X(t)$. Найдите корреляционную функцию и дисперсию случайного процесса $Y(t) = \int_0^t X(s)ds$.

Ответ: $K_X(t_1, t_2) = \frac{1}{\omega^2}(1 - \cos \omega t_1)(1 - \cos \omega t_2)$, $D_Y(t) = \frac{1}{\omega^2}(1 - \cos \omega t)^2$.

6. Задан случайный процесс $X(t) = 4 + Ut^2 + Vt^3$, где U и V - некоррелированные случайные величины, $MU = MV = 0, DU = 3, DV = 6$. Найдите математическое ожидание, корреляционную функцию и дисперсию случайного процесса $Y(t) = \int_0^t X(s)ds$.

Ответ: $m_Y(t) = 4t$, $K_X(t_1, t_2) = \frac{1}{3}t_1^3 t_2^3 + \frac{3}{8}t_1^4 t_2^4$, $D_Y(t) = \frac{1}{3}t^6 + \frac{3}{8}t^8$.

7. Найдите математическое ожидание, корреляционную функцию и дисперсию случайного процесса $Y(t) = \int_0^t X(s)ds$, если $X(t) = Ut + V\cos t$, а случайный вектор (U, V) имеет математическое ожидание $(1; -1)$ и ковариационную матрицу $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Ответ: $m_Y(t) = \frac{t^2}{2} - \sin t$, $K_X(t_1, t_2) = \frac{1}{2}t_1^2 t_2^2 + \frac{t_1^2}{2}\sin t_2 + \frac{t_2^2}{2}\sin t_1 + 3\sin t_1 \sin t_2$,

$D_Y(t) = \frac{1}{2}t^4 + t^2\sin t + 3\sin^2 t$.

8. Найдите дисперсию интеграла $Y(t) = \int_0^t X(s)ds$, зная корреляционную функцию случайного процесса $X(t)$: а) $K_X(t_1, t_2) = 2t_1^2 t_2^2 + 3t_1 t_2$; б) $K_X(t_1, t_2) = t_1 t_2 e^{t_1 + t_2}$.

Ответ: а) $D_Y(t) = \frac{2}{9}t^6 + \frac{3}{4}t^4$; б) $D_Y(t) = (te^t - e^t + 1)^2$.

9. Задана корреляционная функция случайного процесса $X(t)$: $K_X(t_1, t_2) = e^{-(t_1 + t_2)}$. Найдите корреляционную функцию случайного процесса $Y(t) = t\int_0^t X(s)ds$.

Ответ: $K_X(t_1, t_2) = t_1 t_2 (1 - e^{-t_1})(1 - e^{-t_1})$.

10. Найдите математическое ожидание, корреляционную функцию и дисперсию случайного процесса $Y(t) = \frac{1}{2t^2}\int_0^t X(s)ds$, если $X(t) = Ue^{at}$, где a - постоянная величина, U - случайная величина, $MU = 1, DU = 3$.

Ответ: $m_Y(t) = \frac{1}{2at^2}(e^{at} - 1)$, $K_X(t_1, t_2) = \frac{3}{4a^2 t_1^2 t_2^2}(e^{at_1} - 1)(e^{at_2} - 1)$,

$D_Y(t) = \frac{1}{4a^2 t^4}(e^{at} - 1)^2$.

11. Случайный процесс $X(t)$ имеет характеристики: $m_X(t) = 3 + 4t$, $K_X(t_1, t_2) = 10e^{-2|t_1 - t_2|}$. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайного процесса $Y(t) = \int_0^t X(s)ds$.

Ответ: $m_Y(t) = 3t + 2t^2, D_Y(t) = 10t + 5e^{-2t} - 5$.

12. Докажите, что если известна корреляционная функция $K_X(t_1, t_2)$ случайного процесса $X(t)$, то взаимные корреляционные функции случайных процессов $X(t)$ и $Y(t) = \int_0^t X(s)ds$ выражаются интегралами: а) $R_{XY}(t_1, t_2) = \int_0^{t_2} K_X(t_1, s)ds$; б) $R_{YX}(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} K_X(s, t_2)ds$ (теорема 3).

13. Найдите взаимные корреляционные функции случайных процессов $X(t)$ и $Y(t) = \int_0^t X(s)ds$, если известна корреляционная функция $K_X(t_1, t_2)$ случайного процесса $X(t)$:

а) $K_X(t_1, t_2) = t_1 t_2 e^{t_1 + t_2}$; б) $K_X(t_1, t_2) = 4t_1 t_2 + 8$.

Ответ: а) $R_{XY}(t_1, t_2) = t_1 t_2 e^{t_1+t_2} - t_1 e^{t_1+t_2} + t_1 e^{t_1}$; б) $R_{XY}(t_1, t_2) = 2t_1 t_2^2 + 8t_2$.

5. Домашнее задание «СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ-1»

Задан случайный процесс $X(t)$. Найдите:

1) Математическое ожидание $m_X(t) = M[X(t)]$, корреляционную функцию $K_X(t_1, t_2)$ и дисперсию $D_X(t)$ случайного процесса $X(t)$;

2) Математическое ожидание, корреляционную функцию и дисперсию случайного процесса $Y_1(t) = \frac{dX(t)}{dt}$;

3) Математическое ожидание, корреляционную функцию и дисперсию случайного процесса $Y_2(t) = X(t) + \frac{dX(t)}{dt}$;

4) Математическое ожидание, корреляционную функцию и дисперсию случайного процесса $Y_3(t) = \int_0^t X(s)ds$;

5) Взаимные корреляционные функции $R_{XX'}(t_1, t_2)$ и $R_{X'X}(t_1, t_2)$.

Варианты заданий.

1. $X(t) = Ut^2 + V\sin t$, где случайный вектор (U, V) имеет математическое ожидание $(1, -1)$ и ковариационную матрицу $\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}3 \end{pmatrix}$.
2. $X(t) = Ut + V\cos t$, где случайный вектор (U, V) имеет математическое ожидание $(0, -2)$ и ковариационную матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
3. $X(t) = 2 + t + Ut^2 + Vt^3$, где U и V - некоррелированные случайные величины, $MU = MV = 0, DU = 1, DV = 0{,}1$.
4. $X(t) = U + Ve^t$, где U и V - некоррелированные случайные величины, $MU = 3$, $MV = 2, DU = 1, DV = 7$.
5. $X(t) = U\cos t + V\cos t$, где случайный вектор (U, V) имеет математическое ожидание $(-1/2, 1)$ и ковариационную матрицу $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.
6. $X(t) = 1 + Ut + Vt^2$, где U и V - некоррелированные случайные величины, $MU = MV = 0, DU = 3, DV = 1$.
7. $X(t) = Ut^2 + Vt^3$, где случайный вектор (U, V) имеет математическое ожидание $(3, -4)$ и ковариационную матрицу $\begin{pmatrix} 2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 2 \end{pmatrix}$.
8. $X(t) = Ut + V\sin t$, где U и V - некоррелированные случайные величины, $MU = MV = 1,\ DU = DV = 3$.

9. $X(t) = Ut^2 + Ve^{3t}$, где случайный вектор (U, V) имеет математическое ожидание $(-4{,}0)$ и ковариационную матрицу $\begin{pmatrix} 1 & -0{,}4 \\ -0{,}4 & 1 \end{pmatrix}$.

10. $X(t) = t + U\cos t + V\sin t$, где случайный вектор (U, V) имеет математическое ожидание $(1{,}1)$ и ковариационную матрицу $\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$.

11. $X(t) = Ut + V\sin t + 2$, где U и V - некоррелированные случайные величины, $MU = MV = 0,\ DU = \ DV = 1.$

12. $X(t) = Ut^2 + Vt^3$, где U и V - некоррелированные случайные величины, $MU = MV = 0,\ DU = \ DV = 1.$

13. $X(t) = 0{,}1\, U\cos 2t + Ve^{5t}$, где случайный вектор (U, V) имеет математическое ожидание $(-3, 3)$ и ковариационную матрицу $\begin{pmatrix} 1 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & 1 \end{pmatrix}$.

14. $X(t) = t^2 + U\sin t + V\cos t$, где U и V - некоррелированные случайные величины, $MU = MV = 0,\ DU = \ DV = 10.$

15. $X(t) = U\cos t - Vt^2 - 4$, где U и V - некоррелированные случайные величины, $MU = MV = 0,\ DU = 2,\ DV = 4.$

16. $X(t) = 7 - t + Ut + Vt^4$, где U и V - некоррелированные случайные величины, $MU = MV = 0,\ DU = \ DV = 1.$

17. $X(t) = 7U\sin t + Vt^3$, где $MU = MV = 2,\ DU = 1,\ DV = 7,\ cov(U, V) = 1.$

18. $X(t) = 1 + U\sin 5t - 7Vt\cos t$, где $MU = 7, MV = 1,\ DU = \ DV = 4,\ cov(U, V) = 0.$

19. $X(t) = U\cos t + Vt^3$, где U и V - некоррелированные случайные величины, $MU = MV = 0,\ DU = 2,\ DV = 1.$

20. $X(t) = 0{,}2Ue^{5t} + V\cos 4t$, где случайный вектор (U, V) имеет математическое ожидание $(1, 2)$ и ковариационную матрицу $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

21. $X(t) = t + U\sin 2t + V\cos 2t$, где U и V - некоррелированные случайные величины, $MU = MV = 1,\ DU = \ \ DV = 5.$

22. $X(t) = Ut^2 + V\sin t + 4$, где U и V - некоррелированные случайные величины, $MU = MV = 0,\ DU = 2,\ DV = 7.$

23. $X(t) = Ut + Vt\sin t + 2t$, где U и V - некоррелированные случайные величины, $MU = MV = 0,\ DU = 2,\ DV = 3.$

24. $X(t) = Ue^{5t} + Vte^{7t}$, где $MU = 1, MV = 4,\ DU = DV = 2,\ cov(U, V) = -4.$

25. $X(t) = Ue^{6t} + 7V\cos 3t$, где случайный вектор (U, V) имеет математическое ожидание $(1, 1)$ и ковариационную матрицу $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

6. ЛИТЕРАТУРА.

1. Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005, 400 с.
2. Волков И.К., Зуев С.М., Цветкова Г.М. Случайные процессы. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2003.
3. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. М.: Высшая школа, 2000.
4. Свешников А.А. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций. М., Наука, 1970.
5. Случайные функции: Учеб. Пособие. Тескин О.И., Цветкова Г.М., Козлов Н.Е., Пашовкин Е.М. М, Изд-во МГТУ, 1994.